

# EJERCICIOS DE MATRICES

## RELACIÓN I.

① Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ;  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calcule  $x, y, z$ , sabiendo que  $A \cdot B = 2C - D$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ x+3y \\ x \end{pmatrix}$$

$$2C - D = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+y \\ x+3y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-2 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$\begin{cases} 3x+y = 2-2 \\ x+3y = 2-2 \\ x-z = 0 \end{cases} \begin{cases} 3x+y+z = 2 \\ x+3y+z = 2 \\ x+z = 0 \end{cases} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2: 3F_2 - F_1 \\ F_3: 3F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) F_3: 8F_3 + F_2 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 18 & -12 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 3x+y+z = 2 \\ 8y+2z = 4 \\ 18z = -12 \end{cases} \begin{cases} 3x + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 2 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3} \\ 4y + z = 2 \rightarrow 4y + \frac{2}{3} = 2 \rightarrow 4y = 2 + \frac{2}{3} \rightarrow 4y = \frac{8}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow y = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Luego  $x = \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ ,  $z = -\frac{2}{3}$ .

② Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Realice, cuando sea posible,  $A \cdot B$ ,  $B \cdot C$ ,  $C \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$B \cdot C$  no se puede, ya que el número de columnas de  $B$  no coincide con el número de filas de  $C$ .

$C \cdot A$  tampoco se puede, por el motivo anterior.

b) Resuelva la ecuación matricial  $AX+B=C$

$$\begin{aligned} \text{Despejamos } X &\rightarrow AX = C - B \\ \underbrace{A^{-1}AX}_{I} &= A^{-1}(C - B) \\ X &= A^{-1}(C - B) \end{aligned}$$

Calculo  $A^{-1}$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-3) = -1.$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculo  $C - B$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo  $X$ :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 6 \\ -11 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

③ Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de  $m$  para que dicha matriz tenga inversa.

$A$  tiene inversa si  $|A| \neq 0$

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \cdot (m-6) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot (m+1) + 0 \cdot 2 \cdot (-1) - [-(m-6)(m+1) + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 0] = \\ &= 3m+3 - [-(m^2+m-6m-6) + 12] = 3m+3 - (-m^2-m+6m+6+12) = \\ &= 3m+3 + m^2+m-6m-6-12 = m^2-2m-15 = 0; m = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{matrix} < 5 \\ < -3 \end{matrix} \end{aligned}$$

$A$  tiene inversa cuando  $m \neq 5$  y  $m \neq -3$ .

b) Haciendo  $m=4$ , resuelva la ecuación matricial

$$X \cdot A = (3 \ 1 \ 1)$$

$$\text{Si } m=4, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_I = (3 \ 1 \ 1) \cdot A^{-1} \rightarrow X = (3 \ 1 \ 1) \cdot A^{-1}$$

Cálculo  $A^{-1}$ :

$$|A| = 15 - (10 + 12) = -7$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -6 & +15 & -10 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}; [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 15 & -5 & -6 \\ -10 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -1/7 \\ -15/7 & 5/7 & 6/7 \\ 10/7 & -1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$$

Cálculo  $X$ :

$$X = (3 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -1/7 \\ -15/7 & 5/7 & 6/7 \\ 10/7 & -1/7 & 4/7 \end{pmatrix} = \left( 13/7 \quad -2/7 \quad 1 \right)$$