EJERCICIOS DE FUNCIONES PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD ANDALUCIA 2011

1. Tras un test realizado a un nuevo modelo de automóvil, se ha observado que el consumo de gasolina, $c(x)$, expresado en litros, viene dado por la función $c(x) = 7{,}5 - 0{,}05.x + 0{,}00025.x^2$, siendo x la velocidad en km/h y $25 \leq x \leq 175$.
   a) **(0.5 puntos)** Determine el consumo de gasolina a las velocidades de 50 km/h y 150 km/h.
   b) **(1 punto)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $c(x)$.
   c) **(1 punto)** ¿A qué velocidades de ese intervalo se obtiene el mínimo consumo y el máximo consumo y cuáles son éstos?

2. Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x+2} & si\ \ x \leq 0 \\ \frac{2}{x-2} & si\ \ x > 0 \end{cases}$
   a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.
   b) **(1 punto)** Halle las ecuaciones de las asíntotas de esta función.

3. Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, viene dada en función de la cantidad, x, que se invierte, también en miles de euros, por la siguiente expresión: $R(x) = -0{,}001.x^2 + 0{,}4.x + 3{,}5\ \ con\ \ x \geq 10$
   a) **(0.5 puntos)** Calcule la rentabilidad para una inversión de 100000 euros.
   b) **(1.5 puntos)** Deduzca y razone qué cantidad habría que invertir para obtener la máxima rentabilidad.
   c) **(0.5 puntos)** ¿Qué rentabilidad máxima se obtendría?

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & si\ \ x \leq 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & si\ \ 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & si\ x > 3 \end{cases}$
   a) **(0.75 puntos)** Calcule el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.
   b) **(1.75 puntos)** Para $a = 2$ estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

5. El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación
$$B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}.t^2 - t + 5 & si\ \ 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{t+1}{2} & si\ 6 < t \leq 12 \end{cases} \quad , t\ es\ el\ tiempo\ transcurrido\ en\ meses$$
   a) **(1 punto)** Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.
   b) **(0.5 puntos)** ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio?
   c) **(1 punto)** Represente gráficamente la función $B(t)$. ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió?

6. **a) (1.5 puntos)** La gráfica de la función derivada, f', de una función f es una parábola que corta al eje OX en los puntos (-1,0) y (3,0), y tiene su vértice en (1,- 4).
   Estudie, a partir de ella, la monotonía de la función f e indique la abscisa de cada extremo relativo.
   b) **(1 punto)** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = -2.e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

7. **a) (1 punto)** Calcule la función derivada de $f(x) = \frac{e^{-2x}}{(-x^2+2)^2}$

b) **(1.5 puntos)** Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes *N*(*t*) que acude un día a una cadena de almacenes, en función del número de horas *t* que llevan abiertos, es $N(t) = at^2 + b.t$, $0 \leq t \leq 8$, $a, b \in R$

Sabiendo que el máximo de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule *a* y *b*.

8. Las funciones $I(t) = -2t^2 + 51.t$ y $G(t) = t^2 - 3t + 96$ con $0 \leq t \leq 18$ representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, *t*, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.

a) **(0.5 puntos)** ¿Para qué valores de *t*, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?

b) **(1 punto)** Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de *t* y represéntela gráficamente.

c) **(1 punto)** ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueron máximos? Calcule el valor de ese beneficio.

9. **a) (1.25 puntos)** Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$

b) **(1.25 puntos)** Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

10. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & si\ x \leq 2 \\ 4 - \frac{a}{x} & si\ x > 2 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Halle el valor de *a* para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de *f* para ese valor de *a*.

b) **(1 punto)** Para *a* = 1, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.

11. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x + 4 & si\ x \leq 2 \\ \frac{4}{x} & si\ 2 \leq x < 4 \\ x^2 - 4x + 1 & si\ x > 4 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.

b) **(0.5 puntos)** Determine los extremos locales de *f*.

c) **(1 punto)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x* = 3.

12. **(2.5 puntos)** Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2^x + x^2}{x} \qquad g(x) = (x^2+1)^2 . ln(e^{3x} + 4) \qquad h(x) = \frac{1}{3x} - \frac{5}{x^2 - 2}$$