	DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS OPCIÓN A	2º Bachillerato Matemáticas II	Calificación
Alumno/a:		Grupo:	Fecha:

1. Sea la función definida por $f(x)=Ln(x^2+3x)$, donde Ln denota el logaritmo neperiano.
   a) **(1,5 puntos)** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x-2y+1=0$
   b) **(1 punto)** Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

2. **(2,5 puntos)** Considera la función $f:\Re \to \Re$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{2}{x+1} & si \quad 1\le x \end{cases}$$

   Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de f.

3. **(2'5 puntos)** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

4. **(2'5 puntos)** Sea f la función definida, para $x\neq 0$, por $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de f.

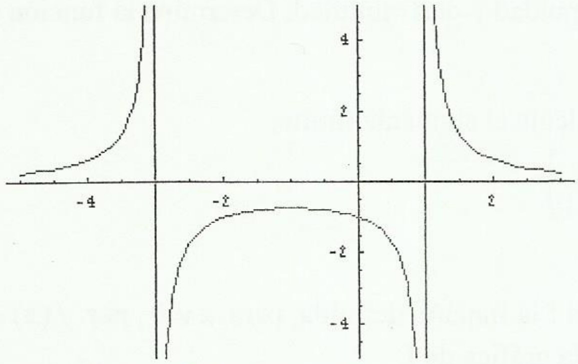
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS **OPCIÓN B**	**2º Bachillerato** **Matemáticas II**	**Calificación**
Alumno/a:	**Grupo:**	**Fecha:**

Ejercicio 1:

Sea la función f(x) definida como sigue: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Estudiar la continuidad de f(x) en todo punto de R (reales)

Ejercicio 2. Determina a, b y c para que la curva de la función $y = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ sea la siguiente



Ejercicio 3. Calcula las asíntotas de la función dada por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$$

y estudia la posición de las asíntotas respecto a la función

Ejercicio 4. Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x \to 2}\left(\frac{5}{x-2} - \frac{2x+6}{x^2 - 2x}\right) \qquad \lim_{x \to \infty}\left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\right]^{\frac{x^2+3}{x}}$$

Ejercicio 5. Encontrar un intervalo donde la función $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 - 1}{x - 3}$ tenga al menos una raíz real

OPCIÓN A

1. a) Paralela a la recta $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, luego $m = \frac{1}{2} = f'(x)$

$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{2} \rightarrow 4x+6 = x^2+3x \rightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow x=3 \quad \cancel{x=-2} \rightarrow$ Este punto no puede ser, porque no está en el dominio.

Luego el punto pedido es $(3, \ln 18)$

b) Recta tangente: $y - f(3) = f'(3)(x-3) \rightarrow y - \ln 18 = \frac{1}{2}(x-3)$

Recta normal: $y - f(3) = \frac{-1}{f'(3)}(x-3) \rightarrow y - \ln 18 = -2(x-3)$

2. $Dom(f) = \mathbb{R}$

Posibles puntos de discontinuidad $x=0, x=1$

$\boxed{x=0}$

$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (1-x^2) = 1 \end{array}\right\}$ Es continua en $x=0$

$\boxed{x=1}$

$\left.\begin{array}{l} f(1)=1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x+1} = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (1-x^2) = 0 \end{array}\right\}$ $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$ por lo que $f(x)$ no es continua en $x=1$ y por tanto no es derivable

Es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

Estudio la derivabilidad de f en $x=0$

$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si \quad x<0 \\ -2x & si \quad 0<x<1 \\ \frac{-2}{(x+1)^2} & 1<x \end{cases}$ $\quad \left.\begin{array}{l} f'_-(0) = -1 \\ f'_+(0) = 0 \end{array}\right\}$ Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, f no es derivable en $x=0$

Es derivable en $\mathbb{R} - \{1, 0\}$ y la derivada es $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si \quad x<0 \\ -2x & si \quad 0<x<1 \\ \frac{-2}{(x+1)^2} & si \quad 1<x \end{cases}$

3. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2-1}\right) = \infty - \infty = I \rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1-2\ln x}{\ln x \cdot (x^2-1)} = \frac{0}{0} = I \xrightarrow{\text{L'Hôpital}}$

$\lim_{x\to 1} \frac{2x - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}(x^2-1) + 2x\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x^2-1+2x^2\ln x} = \frac{0}{0} = I \rightarrow$ L'Hôpital

$\lim_{x\to 1} \frac{4x}{2x+4x\ln x+2x} = \frac{4}{2+2} = 1$

4. Hecho en clase

OPCIÓN B

① $Dom(f) = \mathbb{R}$.
Posible punto de discontinuidad en $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2}{1-x} = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

luego la función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

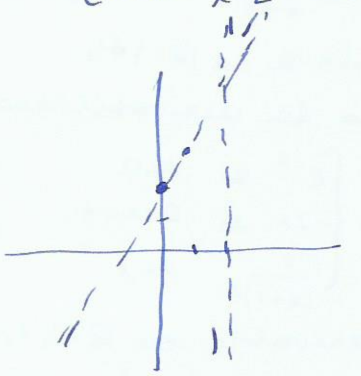
La discontinuidad es inevitable de salto finito

② Tiene que tener dos asíntotas verticales en $x=-3$ y $x=1$, luego el denominador es $(x+3)(x-1) = x^2+2x-3$ y así $b=2$ y $c=-3$.

Como pasa por $(0,-1)$: $\dfrac{a}{0^2+b\cdot 0-3} = -1 \Rightarrow \dfrac{a}{-3} = -1 \Rightarrow a=3$

③ $Dom(f) = \mathbb{R}-\{2\}$

Asíntota vertical en $x=2$ ya que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2}{x-2} = \dfrac{6}{0} = \text{Ⓘ} \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+2}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+2}{x-2} = +\infty \end{cases}$



Asíntotas horizontales no tiene ya que
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+2}{x-2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2}{x-2} = -\infty$

Asíntota oblicua en $y = x+2$ ya que

$$\begin{array}{r|l} x^2+2 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x+2 \\ \hline 2x+2 & \\ -2x+4 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

Posición de las ramas:

$\dfrac{6}{x-2}$

x	y
100	arriba
-100	abajo

④ a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{5}{x-2} - \dfrac{2x+6}{x^2-2x}\right) = \infty-\infty = \text{Ⓘ} \rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x-2x-6}{x^2-2x} = \dfrac{0}{0} = \text{Ⓘ} \rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3(x-2)}{x(x-2)} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x}} = 1^{\infty} = \text{Ⓘ} \rightarrow e^{\lambda} = e$

$\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1} - 1\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x}\cdot\dfrac{x^2+x+1-x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2+3)\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2+1)} = 1$

⑤ $Dom(f) = \mathbb{R}-\{3\}$

$f(0) = \dfrac{1}{3}$

$f(1) = \dfrac{-1}{2}$

Como f es continua en $(0,1)$, signo $f(0) \neq$ signo $f(1)$, por el Teorema de Bolzano $\exists c\in\mathbb{R} / f(c)=0$ y por tanto en ese intervalo existe una raíz